2.16 Le théorème de Krein-Milman en dimension finie (159, 181) [15]

Un théorème qui a un gros intérêt en dimension infinie, mais qui n'a pas à être sous-estimé en dimension finie : il permet notamment de montrer le théorème de Birkhoff, disant que l'ensemble des matrices bistochastiques est l'enveloppe convexe des matrices de permutation. Ceci, couplé au théorème de Choquet indiquant que toute forme linéaire admet, sur un ensemble convexe compact, son minimum sur ce convexe en un point extrémal, nous dit que les problèmes de transport optimal de Monge et de Kantorovitch ont la même solution, quand les espaces polonais qu'on considère sont des ensembles finis (voir le livre de Villani sur le transport optimal ou les documents de Thomas Cavallazzi le boss).

Théorème 2.41 (Krein, Milman)**.** Soient E un espace euclidien et K une partie convexe et compacte de E. Alors K est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.

Démonstration. On prouve ce résultat par récurrence sur la dimension p du sous-espace affine engendré par K. Si $p = 0$, K est un singleton et donc le résultat est vrai. Si $p \geqslant 1$, alors, quitte à translater K pour pouvoir assimiler le sous-espace affine engendré par K à un sous-espace vectoriel, et quitte à remplacer E par ce sous-espace vectoriel, on peut supposer $p = \dim(E)$. On prouve alors le résultat en 3 étapes :

Étape 1 : K est l'enveloppe convexe de sa frontière.

Soit $c \in K$. Si $c \in \partial K$, on n'a rien à démontrer. Si $c \in \overset{\circ}{K}$, alors toute droite D passant par c est telle que $D \cap K$ est convexe comme intersection de deux parties convexes et compacte comme intersection d'un compact et d'un fermé. Ainsi, il existe $a, b \in D \cap K$ tel que

$$D \cap K = [a, b].$$

Maintenant, a et b appartiennent à ∂K. En effet, dans le cas contraire, si (par exemple) $a \notin \partial K$, alors $a \in D \cap \overset{\circ}{K}$, qui est un ouvert de D. Ainsi, il existe $\varepsilon > 0$ tel que le segment ouvert $]a - \varepsilon \vec{u}, a + \varepsilon \vec{u}[$ appartienne à $D \cap K$, en notant $\vec{u}$ un vecteur directeur de D (farie un dessin !). Ainsi :

$$]a - \varepsilon \vec{u}, a + \varepsilon \vec{u}[\subset [a, b] = D \cap K, \quad \textbf{ABSURDE !!}$$

Ainsi, $a, b \in \partial K$ et donc c s'écrit comme combinaison convexe de deux points de ∂K, ce qui conclut la première étape.

Étape 2 : En tout point de la frontière de K existe un hyperplan d'appui.

Puisqu'on s'est limité, grâce à l'étape 1, à la frontière de K, on veut montrer que tout point de la frontière de K est combinaison convexe de points extrémaux de K. Pour cela (faire un dessin !) on veut pouvoir intersecter K avec un hyperplan d'appui H en un point de la frontière puis appliquer l'hypothèse de récurrence à $K \cap H$ qui est un convexe compact engendrant un espace affine de dimension au plus $p - 1$ puisque H est de dimension $p - 1$ (car $\dim(E)$ a pu être supposé égal à p !). Bref montrons donc que si $c \in \partial K$, alors il existe un hyperplan d'appui H de K en c, c'est-à-dire qu'il existe $v \in E$ tel que :

$$\forall c' \in K, \quad \langle v, c' \rangle \leqslant \langle v, c \rangle,$$

l'hyperplan associé étant $H = \{w \in E, \quad \langle v, w \rangle = \langle v, c \rangle\}$. Puisque $c \in \partial K$, il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (E \setminus K)^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} c$. On sait que les projetés $p_K(x_n)$ sur le convexe K vérifient la propriété d'angle obtus :

$$\forall c' \in K, \quad \langle x_n - p_K(x_n), c' - p_K(x_n) \rangle \leqslant 0,$$

ce qui se réécrit :

$$\forall c' \in K, \quad \langle x_n - p_K(x_n), c' \rangle \leqslant \langle x_n - p_K(x_n), p_K(x_n) \rangle.$$

Ainsi, en les points $p_K(x_n)$ existe un hyperplan d'appui, de vecteur normal $x_n - p_K(x_n)$. Puisque $x_n \in E \setminus K$, on peut considérer un vecteur normal unitaire pour ces hyperplans d'appui :

$$v_n := \frac{x_n - p_K(x_n)}{\|x_n - p_K(x_n)\|}.$$

Par compacité de la sphère unité, il existe une extractrice φ telle que la suite $\left(v_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain vecteur $v \in E$. Montrons que l'hyperplan $H := c + (v)^\perp$ est un hyperplan d'appui de K en c. Par propriété des angles obtus, on a :

$$\forall c' \in K,\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\langle v_{\varphi(n)}, c' \right\rangle \leqslant \left\langle v_{\varphi(n)}, p_K\left(x_{\varphi(n)}\right)\right\rangle.$$

Par continuité de p_K, on a donc, en faisant tendre n vers l'infini dans cette inégalité :

$$\forall c' \in K, \quad \langle v, c' \rangle \leqslant \langle v, c \rangle$$

car $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} c$ et $p_K(c) = c$. Ainsi, H est bien un hyperplan d'appui de K en c, cela conclut donc cette deuxième étape !

Étape 3 : $c \in \partial K$ est un point extrémal de K si et seulement si c est un point extrémal de $K \cap H$, où H est un hyperplan d'appui de K en c, et conclusion.

$\Rightarrow$: Si c est un point éxtrémal de K et si H est un hyperplan d'appui de K en c, alors on a :

$$(K \cap H) \setminus \{c\} = (K \setminus \{c\}) \cap H.$$

c étant un point extrémal de K, $K \setminus \{a\}$ est convexe, il en va donc de même pour $(K \cap H) \setminus \{c\}$ par intersection de deux convexes.

$\Leftarrow$: Si H est un hyperplan d'appui de K en c et si c est un point extrémal de $K \cap H$, alors, soient $c_1, c_2 \in K$ tels que :

$$c = \frac{c_1 + c_2}{2}.$$

Montrons que $c_1 = c_2 = c$. Si v est un vecteur normal définissant l'hyperplan H, on a donc, en testant l'égalité ci-dessus contre le vecteur v :

$$\frac{1}{2}\big(\underbrace{\langle v, c_1\rangle}_{\leqslant\langle v,c\rangle} + \underbrace{\langle v, c_2\rangle}_{\leqslant\langle v,c\rangle}\big) = \langle v, c\rangle.$$

Cela signifie donc :

$$\langle v, c_1 \rangle = \langle v, c_2 \rangle = \langle v, c \rangle.$$

Ainsi, $c_1, c_2 \in K \cap H$ et donc, par extrémalité de c dans $K \cap H$, on a que $c = c_1 = c_2$, donc c est un point extrémal de K.

On conclut donc que, si $c \in \partial K$, c est dans un hyperplan d'appui H de K en c, donc appartient à $K \cap H$ qui est convexe, compact tel que la dimension du sous-espace affine engendré est au plus $p-1$. Par hypothèse de récurrence, $K \cap H$ est donc l'enveloppe convexe de ses points extrémaux, donc c est combinaison convexe de points extrémaux de $K \cap H$, qui sont également des points extrémaux de K d'après ce qui précède. Ainsi, c est combinaison convexe de points extrémaux de K, ce qui conclut ! $\square$